1. Distribución gamma

Uno de los intereses principales de esta distribución es que a partir de ella se derivan dos de gran importancia.

Definición: Se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si y solo si la función de densidad de Y es

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & , \quad 0 \leq y < \infty \\ 0 & , \quad \text{en otro punto} \end{cases}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es conocida como la función gamma. Esta se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}dy.$$

Además es fácil demostrar que esta función cumple con las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$, para toda $\alpha > 1$.
3. Si n es un entero, entonces $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Por lo tanto la función gamma se puede pensar como una generalización de los factoriales.

Ejemplo. Pruebe las primeras dos propiedades de la función gamma.

Solución.
1)

$$\Gamma(1) = \int 0^{\infty} y^{1-1}e^{-y}dy = \int_0^{\infty} e^{-y}dy = 1.$$

2) Necesitamos integrar

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}dy.$$

Utilizando integración por partes y tomando $u = y^{\alpha-1}$ y $dv = e^{-y}dy$ tenemos que $du = (\alpha - 1)y^{(\alpha-1)-1}dy$ y $v = -e^{-y}$. Luego

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}dy &= \left[-y^{\alpha-1}e^{-y}\right]_0^{\infty} + (\alpha - 1)\int_0^{\infty} y^{(\alpha-1)-1}e^{-y}dy \\ &= (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1). \end{aligned}$$

Ejercicio. Pruebe la tercera propiedad.

Es importante destacar que si α no es entero, entonces la integral no puede realizarse.

Teorema: Si Y tiene distribución gamma con parámetros α y β, entonces

$$\mu = E[Y] = \alpha\beta \text{ y } \sigma^2 = V(Y) = \alpha\beta^2.$$

<u>Ejemplo</u>. Los tiempos semanales que una máquina industrial se detiene por averías Y (en horas) tienen aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Las pérdidas L (en dólares) para la industria, como consecuencia de estos periodos de inactividad, están dadas por la expresión $L = 30Y + 2Y^2$. Calcule el valor esperado y la varianza de L.

<u>Solución</u>.
Por propiedades del valor esperado tenemos que:

$$E[L] = E[30Y + 2Y^2] = 30E[Y] + 2E[Y^2].$$

Como Y es gamma, sabemos que $E[Y] = \alpha\beta = 6$ y $V(Y) = \alpha\beta^2 = 12$. Recordemos que $E[Y^2] = V(Y) + E[Y]^2$, luego

$$E[L] = 30 \times 6 + 2\left(12 + 6^2\right) = 180 + 96 = 276.$$

Para calcular la varianza utilizaremos un resultado que se pide demostrar en el ejercicio 4.89 del libro de texto que asegura que:

$$E[Y^a] = \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha + a)}{\Gamma(\alpha)}$$

Luego

$$V(L) = E[L^2] - E[L]^2 = E[(30Y + 2Y^2)^2] - (276)^2$$

$$= 900E[Y^2] + 120E[Y^3] + 4E[Y^4] - (276)^2 = 900\frac{2^2\Gamma(5)}{\Gamma(3)} + 120\frac{2^3\Gamma(6)}{\Gamma(3)} + 4\frac{2^4\Gamma(7)}{\Gamma(3)} - (276)^2.$$

$$= 43200 + 57600 + 23040 - 76176 = 47664.$$

<u>Ejercicio</u>. Demuestre que $E[Y^a] = \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha+a)}{\Gamma(\alpha)}$